



TITLE:

複素葉層の安定集合の幾何と  
 $\overline{\partial}$ 方程式 (葉層の  
微分幾何とベルグマン核)

AUTHOR(S):

大沢, 健夫

---

CITATION:

大沢, 健夫. 複素葉層の安定集合の幾何と $\overline{\partial}$ 方程式 (葉層の微分幾何とベルグマン核). 数理解析研究所講究録 2009, 1661: 87-98

ISSUE DATE:

2009-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140964>

RIGHT:

## 複素葉層の安定集合の幾何と $\bar{\partial}$ 方程式

大沢健夫(名大多元数理)

*Dedicated to the memory of Professor Masayoshi Nagata*

- § 1. 複素葉層とその安定集合
- § 2. 例と観察
- § 3. 安定集合への  $\bar{\partial}$  方程式論の応用
- § 4. 複素等質空間上の余次元が 1 の複素葉層
- § 5. 特異葉層について

§ 1. 複素葉層とその安定集合 以下では、 $M$  は連結かつパラコンパクトな可微分多様体を表す。 $M$  上の葉層(または葉層構造)とは、可微分多様体  $F$  と全単射かつ可微分な写像  $\iota: F \rightarrow M$  の対で、 $\iota$  の微分  $d\iota$  による  $F$  の接ベクトル束  $TF$  の像  $\iota_*TF$  が  $TM$  の可微分な部分ベクトル束になっているものをいう。 $F$  の連結成分を  $F$  の葉という。混同のおそれがないときは葉層  $(F, \iota)$  を単に  $F$  で表す。 $M$  と  $F$  が複素多様体で  $\iota$  が正則写像、かつ  $\iota_*TF$  が  $TM$  の正則部分ベクトル束になっているとき、葉層  $F$  を複素葉層と呼ぶ。 $F$  は  $M$  上の流れの一般化でもあるので「特異点つきの」葉層も自然な対象であり、特に複素葉層の場合は特異点に付随した量(留数など)と  $M$  の特性類との関係を記述する理論が知られているが(cf. [Sw])、ここでは簡単のため、特に断らなければ葉層としては上述の通り特異点のないものを考える。

**定義** 葉層  $F$  の安定集合とは、 $F$  のいくつかの葉の和集合であるような  $M$  の閉部分集合をいう。

$M$  や  $F$  の幾何と ( $M$  自身や空集合以外の)  $F$  の安定集合の幾何との関係を問題にする。特に複素葉層のコンパクトな安定集合が擬凹 (cf. §2) であることを仮定したときの帰結について論じ、複素葉層の分類に資することをめざす。この方向で筆者によって最近得られた結果は次の通りである。まず、コンパクトなケーラー多様体上で、実解析的な Levi 平坦面や余次元が 1 の複素解析的集合について、それらが持ちうる“擬凹度”に関し、 $\bar{\partial}$  方程式の理論を用いて一般的な結果が得られた [O-3, 4]。その続きとして、複素トーラス内の領域上の、余次元が 1 の複素葉層のコンパクトな安定集合について「簡約化定理」が得られた [O-5]。この小論ではこれらの結果とその証明の要点を紹介するとともに、その動機となったいくつかの観察や、関連した結果についても述べたい。具体的

には、等質多様体上の複素葉層に関するE.Ghysの仕事や、特異点付きの複素葉層について、ポアンカレ・ホップ型の指数定理を用いて法ベクトル束が正の安定集合の構造を論じた、A.Lins NetoやM.Brunellaの仕事などである (cf. [Gh], [LN], [B-1,2])。

§2. 例と観察 簡単な例を調べることで、当たりを付けてみよう。A を、複素多様体 M 上の複素葉層 F の、コンパクトかつ連結な一つの安定集合とする。A が複素部分多様体であり、かつ  $\dim F = \dim A$  ならば、A の各点の十分小さな近傍では、F および A は、有限個の正則関数の定値集合の交わりの非交和になっている。従ってこの場合には、F の法ベクトル束  $TM/\iota_*TF$  の A への制限は(A の法ベクトル束でもあるが)、A の基本群から  $GL(r, \mathbb{C})$  ( $r = \text{codim } F$ ) への準同型によって定まる平坦束である。このような安定集合を含む複素葉層の例としては、自明なもの、すなわち

$$(X \times Y, \bigsqcup_{y \in Y} X \times \{y\}, X \times \{y_0\}) \quad (X, Y \text{ は連結な複素多様体, } X \text{ はコンパクト, } y_0 \in Y)$$

や、後で述べる擾乱型葉層の他、コンパクトかつ連結な複素多様体 X 上の平坦アフィン直線束  $L \xrightarrow{\omega} X$  に 無限遠断面  $X_\infty$  を付け加えてコンパクト化したものを M とし、 $TF = TX_\infty \cup (\text{Ker } d\omega)^\perp$  で決まる葉層を F、 $X_\infty$  を A としたものなどがある。特に最後の例において、 $X_\infty$  の擬凹性 (定義は後述) または同じことだが L の擬凸性について、つぎのように非常にはっきりしたことが言える。これはいわばfolkloreであろうが、explicit には[D-O]に、implicitには上田哲生氏の仕事(cf.[U])に含まれることである。

定理1 X がケーラー計量を持てば、L は多重劣調和(plurisubharmonic)な皆既関数(exhaustion function)を持つ。

証明 X がケーラー計量を持つことから、ホッジ理論により、X の開被覆  $\{U_\alpha\}$  および局所ファイバー座標  $\{\zeta_\alpha\}$  を選んで、それらの間の  $\omega^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$  上での変換式が

$$(1) \quad \zeta_\alpha = \zeta_\beta \exp i\theta_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta}, \quad \theta_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}, \quad c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$$

で与えられるようにできる。すると再び X のケーラー性とホッジ理論より、 $U_\alpha$  上の多重調和関数  $p_\alpha (\alpha=1,2,\dots,m)$  が存在して、 $U_\alpha \cap U_\beta$  上で

$$(2) \quad c_{\alpha\beta} = p_\alpha - p_\beta \exp i\theta_{\alpha\beta}.$$

(1) と (2) より  $|\zeta_\alpha - p_\alpha|^2 = |\zeta_\beta - p_\beta|^2$  であるのでこの式により L 上の可微分非負関数が定義される。その皆既性は明白。多重劣調和性に関しては、仮定より  $\partial\bar{\partial}p_\alpha = 0$  なので

$$(3) \quad \begin{aligned} i\partial\bar{\partial} |\zeta_\alpha - p_\alpha|^2 \\ = i(d\zeta_\alpha \wedge d\bar{\zeta}_\alpha - d\zeta_\alpha \wedge \bar{\partial}p_\alpha - \partial p_\alpha \wedge d\bar{\zeta}_\alpha + \partial p_\alpha \wedge \bar{\partial}p_\alpha + \bar{\partial}p_\alpha \wedge \partial p_\alpha) \geq i\partial\bar{p}_\alpha \wedge \bar{\partial}p_\alpha \end{aligned}$$

となり正しい。

Q.E.D.

**定義** 複素多様体  $M$  のコンパクト部分集合  $K$  が擬凹であるとは、 $M - K$  上の可微分な多重劣調和関数  $\Phi$  で、 $z \rightarrow \partial K$  のとき  $\Phi(z) \rightarrow \infty$  を満たすものがあることをいう。

**例**  $n$ 次元複素射影空間  $CP^n$  の複素超平面は擬凹である。

$X$ 上の平坦アフィン束の代わりに、 $CP^1$  の実メビウス変換からなる群  $Möb_{\mathbb{R}}(CP^1)$  を構造群とする、 $X$ 上の  $CP^1$  平坦束  $N \rightarrow X$  を考える。この束の局所平坦断面の解析接続により、 $N$ 上に余次元が1の複素葉層  $H$  が定まる (上のFと同様)。  $N$  に同伴する  $X$ 上の  $RP^1$  束を  $S \rightarrow X$  とすると、 $S$  は  $N$  内の実超曲面であり、 $H$  の一つの安定集合になっている。このとき、組  $(N, H, S)$  に対して定理1の類似が成立する。

**定理2** (cf. [D-O])  $X$  がケーラー計量を持てば  $S$  は擬凹である。

**証明**  $N$  を定める、 $X$  の基本群から  $Möb_{\mathbb{R}}(CP^1)$  への準同型を  $\rho$  とする。もし  $\rho$  の像が共通の固定点を持てば、それに対する  $N$  の正則断面  $\sigma$  があるから、 $\sigma(X)$  を  $N$  から除いてアフィン直線束  $L$  が得られ、 $N$  は  $L$  の上のようなコンパクト化に他ならない。  $X$  はケーラー計量を持つから、 $L$  は (1) の形のファイバー座標の変換を持つ。それゆえ、このようなファイバー座標に関して、 $N - S$  内の点  $p$  からファイバーに沿って  $S$  まで計った距離  $\delta(p)$  は、ファイバー座標の選び方によらずに定まる。  $N - S$  は局所擬凸だから  $-\log \delta$  は多重劣調和である。ゆえに  $-\log \delta$  と定理1の証明内で作った  $L$  上の多重劣調和皆既関数との和は、 $N - S$  上の多重劣調和な皆既関数となる。つぎに  $\rho$  が共通の固定点を持たないとする。必要なら  $N$  と  $X$  を各々その2重被覆で置き換えて、束  $N - S \rightarrow X$  は可微分な断面  $s$  を持つとして良い。  $Möb_{\mathbb{R}}(CP^1)$  は  $CP^1 - RP^1$  上のポアンカレ計量を保つから、 $N - S$  のファイバー上のポアンカレ計量に関して多重調和な (=すべての複素曲線上で調和な) 断面が定義されるが、ポアンカレ計量が負曲率であり、 $X$  はケーラー計量を持ち、 $\rho$  は固定点を持たないから、 $s$  を初期値とする断面の連続族  $s_t$  ( $0 \leq t < \infty$ ) で、多重調和な断面に収束するものが存在する。より具体的には、 $X$  上にケーラー計量を固定し、 $N - S$  の調和断面を特徴づけるオイラー・ラグランジュ方程式を  $\Delta \sigma = 0$  としたとき、熱方程式  $\Delta s_t = ds_t/dt$ ,  $s_0 = s$  の解  $s_t$  の  $L^2$  エネルギー (=ディリクレ積分) は曲率条件より一様に有界となり、従って  $\rho$  の条件と合わせると、 $s_t$  のすべての像を含む  $N - S$  のコンパクト集合が存在する。よって Eells-Sampson の理論 [E-S] により、 $s_t$  は調和断面  $s_\infty$  に収束し、Y.-T. Siu によるケーラー多様体上の非線形ホッジ理論 [Si] により、 $s_\infty$  は多重調和となる。  $N - S$  の  $s_\infty(X)$  を含む連結成分を  $\Omega$  とする。束射影  $\eta$  と断面  $s_\infty$  を用いて、 $\Omega$  上の関数  $\Psi$  を

$\Psi: p \mapsto p$  を含むファイバー内の、 $s_\infty(\eta(p))$  を中心とし、周上に  $p$  を含む、ポアンカレ計量に関する円板の面積

によって定めると、(3) と同様の理由により  $\log(\Psi+1)$  は  $\Omega$  上で多重劣調和になる。  $\log(\Psi+1)$  の皆既性は明白。  $N - S$  のもう片方の連結成分についても同様なので、 $S$  は擬凹である。

Q.E.D.

以下では定理 1 と定理 2 について、技術的な点も含めて多少のコメントをしたい。

1. ケーラー性の仮定は落とせない。ホップ多様体上で反例が作れるからである (cf. [D-F])。
2. 定理 2 の証明は、アファイン主束がメビウス主束の退化形であるという状況の反映でもある。(定理 1 の証明中の関係式 (2) は、関数系  $\{p_\alpha\}$  が  $L$  の  $X$  上の断面であることを意味することに注意されたい。)
3. J.Jost と S.-T.Yau[J-Y] は Siu の非線形ホッジ理論を用いて、多重円板を普遍被覆にもつコンパクト多様体の剛性について研究したが、その中で次を示している。

**命題 1** 複素多様体  $M$  から円板  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  へのポアンカレ計量に関する多重調和写像  $f$  について、 $\text{rank } df \equiv 2$  かつ  $\partial f \wedge \bar{\partial} f \equiv 0$  ならば、 $f$  の定値集合全体は  $M$  上の複素葉層である。このとき  $D$  の複素構造を取り替えて、 $f$  が正則写像になるようにできる。

これと同様に、上の束  $N$  を定める準同型  $\rho$  の像が固定点を持たないとき、 $N-S$  の多重調和断面  $\sigma$  により、 $d\sigma$  のファイバー方向の成分が退化する点をすべて  $X$  から除いた開集合上に、複素葉層が導かれる。つまりこのようにして、基本群が「大きい」 $X$  上には、それだけ多くの(特異点付きの)複素葉層が作れる。 $X$  が  $\mathbb{CP}^n$  や複素トーラスの場合だと、基本群が可換なのでその限りではない。

4. 与えられた複素多様体  $M$  上に多重劣調和な皆既関数が存在するかどうかを問う問題は、一般化された Levi 問題と呼ばれ、 $\mathbb{C}^n$  上の局所擬凸領域の正則凸性を示した岡理論 (Hartogs の逆問題の解) から派生したものである。ところが岡理論の立場からすれば、定理 1 や定理 2 はいかにも正体不明の主張であろう。なぜなら、これらは正則関数の存在について語るところがあまりに少ないからである。実のところ、上の  $S$  のように「両面擬凸な」超曲面がはじめて多変数関数論で話題になったのは、「擬凸であつても正則凸でない」奇妙な領域の境界としてであった(cf. [Gr])。その後 [O-2] で発見された、境界が両面擬凸なスタイン領域も、ベルグマン射影の平滑性が崩れるケースとしてのみ注目されてきたかもしれない(cf. [Ba], [K])。しかしながら、定理 1 や定理 2 のように、より一般的な現象が現れるようになると、結果として新たに「擬凹度」というものへの関心が生ずるわけで、それに応える研究から、複素葉層の安定集合に関する一定の知見が得られたのである。次節ではその話を [O-3,4,5] に沿って紹介したい。

**§ 3. 安定集合への  $\bar{\partial}$  方程式論の応用** まず基礎事項を復習しよう。記号は § 1、§ 2 の通りとする。 $\mathbb{C}^n$  の開集合  $U$  に対し、 $\mathcal{O}(U)$  で  $U$  上の正則関数の集合を表し、部分集合  $B \subset \mathbb{C}^n$  に対し、 $\mathcal{O}(B) = \varinjlim_{U \supset B} \mathcal{O}(U)$  とおく。また、 $\bar{B}$  で  $B$  の閉包を表す。

定理 3 (F.Hartogs, 1906) 2 変数以上の正則関数の孤立特異点は除去可能である。

証明その 1:  $n \geq 2$  のとき、 $f \in \mathcal{O}(\overline{D^n} - \{0\})$ 、 $z \in D^n - \{0\}$  に対して、コーシーの積分公式より

$$f(z) = \left\{ \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_k|=1} \frac{d\zeta_k}{\zeta_k - z_k} \right) \right\} f(\zeta)$$

右辺は  $D$  上  $z$  に関して正則だから、これが  $f$  の正則な拡張になる。

Q.E.D.

証明その 2:  $f$  を上の通りとし、 $C^\infty$  級の関数  $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を、 $\chi|(-\infty, 1/3) = 0$  かつ  $\chi|(2/3, \infty) = 1$  となるようにとり、

$$\hat{f}(z) = \chi(|z|)f(z) \ (\in C(D)), \quad v = \bar{\partial}\hat{f}$$

とおく。 $\text{supp } v \subset \{z \in C^n; \max_k |z_k| \leq 2/3\}$  であるが、 $n \geq 2$  より方程式  $\bar{\partial}u = \bar{\partial}\hat{f}$  は  $D^n$  上、台がコンパクトな解  $u$  を持つから、その  $u$  に対して  $\hat{f} - u$  は  $f$  の正則な拡張である。

Q.E.D.

あとの方の証明を一般化することにより、次を得る。

定理 4 (cf.[Hö])  $M$  を複素多様体、 $E \rightarrow M$  を正則ベクトル束とする。 $M$  上に  $C^\infty$  級皆既関数  $\varphi$  があり、その Levi 形式 (= 複素ヘシアン、 $\partial\bar{\partial}\varphi$  で表す) は、いたるところ 2 個以上の正固有値を持つとする。このとき制限準同型  $H^{p,0}(M, E) \rightarrow \varinjlim_{K \subset\subset M} H^{p,0}(M - K, E)$  ( $p \geq 0$ ) は全射である。

ホッジ理論 (特にレフシェッツ同型) を用いてこれをさらに一般化し、次を得る。

定理 5 上の定理 4 において、さらに次の i), ii), iii) を仮定する。

i)  $M$  はケーラー計量をもつ。

ii)  $E$  は曲率が 0 のファイバー計量をもつ。

iii)  $M$  上に  $C^\infty$  級の多重劣調和な皆既関数  $\varphi$  が存在して、 $\partial\bar{\partial}\varphi$  は  $M$  のあるコンパクト集合の外でいたるところ  $n - k + 1$  個以上の正固有値を持つ。ただし  $k \leq n - 1$  とする。

このとき、 $p + q < n - k$  ならば  $H^{p,q}(M, E) \rightarrow \varinjlim_{K \subset\subset M} H^{p,q}(M - K, E)$  は全射である。

この証明は[O-1]でEが自明束の場合にのみ与えられた([Dm]も見よ)。しかしそれはホッジ理論と $L^2$ 評価式の方法のみによるので、計量的に平坦なベクトル束への一般化は自明である。

つぎにLevi平坦面についてだが、定義の復習から始めよう。

**定義**  $X$  を複素多様体  $M$  内の、 $C^2$ 級の閉じた実超曲面とする。 $X$  の  $M$ における局所定義関数  $r$  が  $X$  上いたるところ  $\partial\bar{\partial}r \mid \text{Ker } \partial r = 0$  をみたすとき、 $X$  はLevi平坦面であるという。

$X$ が実解析的ならば次の1) ~ 4) が互いに同値であることは見やすい。

- 1)  $X$ はLevi平坦である。
- 2)  $X$ は局所的に $M$ を2つのスタイン領域に分ける(両面擬凸)
- 3)  $X$ は実余次元が1の葉層構造 $F$ を持ち、 $F$ の葉は $M$ の複素部分多様体である。
- 4)  $X$ は局所的に多重調和関数の零点集合である。

**例1 (平坦なLevi平坦面)**  $C^n$ の格子群  $\Gamma$  と、その部分群  $\Gamma'$  で  $\text{rank } \Gamma' = 2n - 1$  をみたすものに対し、 $(R \otimes \Gamma')/\Gamma'$  は複素トーラス  $T = C^n/\Gamma$ 内のLevi平坦面である。 $(R \otimes \Gamma')/\Gamma'$  を、単に $T$ 内の平坦面と呼ぶ。

**例2 (複素多様体内の特殊なスタイン領域の境界)**

$$i) \quad \mathbb{C}P^1 \times (C^*/Z) \supset \partial\Omega = X$$

$$\cup$$

$$\Omega = \{(\zeta, [z]) ; \text{Re}(\zeta z) > 0\}$$

$$\cup$$

$$C^* \times \{\exp(-2\pi^2) < |w| < 1\} \quad \text{ただし } [z] := \{e^m z ; m \in Z\} \quad (\text{cf. [O-2]})$$

$$ii) \quad C^n - \{0\} \supset \{z ; \text{Re } z > 0\} \ni z$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} C^n - \{0\} / Z & \supset & \Omega \ni [z] = \{e^m z ; m \in Z\} \\ (\text{ホップ多様体}) & & \cup \\ & & C^n \times \{\exp(-2\pi^2) < |w| < 1\} \end{array}$$

$$X = \partial\Omega \quad (\text{cf. [N]})$$

例3 (§2のS) コンパクトな複素多様体 $X$ 上の解析的円板束を、その同伴 $CP^1$ 束内の領域と見たときの境界はLevi平坦面である。

次の結果は、それ自身としては定理2を補完する意味がある。

定理6 (cf.[O-3])  $M$ は3次元以上のコンパクトなケーラー多様体、 $X$ は $M$ 内の実解析的なLevi平坦面とする。このとき $M - X$ 上の $C^\infty$ 級の多重劣調和な皆既関数で、そのLevi形式があるコンパクト集合の外でいたるところ3個以上の正固有値を持つものは存在しない。

藤田玲子氏と武内章氏により(独立に、異なった方法で) $CP^n$ の局所擬凸な真部分開集合はスタインであることが知られているので(cf. [F], [T])、定理6は次を含む。

系 (cf. [LN])  $n \geq 3$  ならば、 $CP^n$  は実解析的なLevi平坦面を含まない。

定理6の証明: そのような関数  $\varphi$  があったと仮定して矛盾を導こう。

第1段: Levi平坦面 $X$ の実解析性により、 $M$ の開集合  $U_\alpha$  ( $\alpha=1,2,\dots,m$ )で $X$ を被覆するものを適当にとると、 $U_\alpha$ 上の正則1形式 $\omega_\alpha$ が存在して  $\text{Ker } \omega_\alpha \subset TX \otimes \mathbb{C}$  となる。 $\omega_\alpha = e_{\alpha\beta} \omega_\beta$ ,  $e_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta)$  であるから、微分形式系  $\omega = \{\omega_\alpha\}$  は変換関数系  $\{e_{\alpha\beta}\}$  に付随する直線束  $\nu$  を係数とする1形式である。(  $\nu$  は  $X$  のある近傍  $U$  上の直線束でしかないことに注意。)

第2段:  $X$ は超曲面だから、 $\nu|_X$  は複素直線束として位相的に自明である。従って  $U$ を十分小さくとれば $\nu$ の変換関数系の対数が  $U$ 上の加法的1コサイクルとして定まる。定理5よりこのコサイクルが代表するコホモロジー類は $M$ 上に拡張できる。したがって $\nu$ の、位相的に自明な正則直線束としての $M$ 上への拡張  $\nu$  がある。

第3段:  $M$ はケーラーだから  $\nu$ は平坦束の構造を持ち、従って再び定理5により  $\omega$ は  $\nu$ を係数とする正則1形式  $\tilde{\omega}$  として $M$ 上に拡張できる。 $\nu$ が平坦で $M$ がケーラーだから  $\tilde{\omega}$ の外微分  $d\tilde{\omega}$ が定まり、 $\tilde{\omega}$ は正則なので  $d\tilde{\omega} = 0$  となる。従って、必要なら  $\{U_\alpha\}$ をその細分で置き換えて、 $U_\alpha$ 上の正則関数  $f_\alpha$  で零点を持たないものを適当にとれば

$$(a) \quad U_\alpha \text{ 上で } d(\omega_\alpha/f_\alpha) = 0$$

$$(b) \quad U_\alpha \cap U_\beta \text{ 上で } |e_{\alpha\beta}| = |f_\alpha/f_\beta|$$

が成立する。

第4段: (a) およびポアンカレの補題により(再び必要なら $U_\alpha$ を取り替えて)  $\omega_\alpha/f_\alpha =$



$dF_\alpha$  をみたす関数系  $F_\alpha$  がとれる。(b)より、 $dF_\alpha = \exp(i\theta_{\alpha\beta}) \times dF_\beta$  ( $\theta_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ )。従ってとくに  $M \times M$  における  $X \times X$  の対角線集合の近傍  $V$  上で  $|F_\alpha(z) - F_\alpha(w)|$  は  $\alpha$  の取り方によらない一つの関数  $d(z, w)$  を定める。

第5段:  $\delta(z) = \inf \{ d(z, w); (z, w) \in V \cap (U \times X) \}$  とおく。明らかに  $\delta$  は連続で  $\delta^{-1}(0) = X$ 。正数  $\varepsilon$  を  $\delta^{-1}(\varepsilon)$  がコンパクトかつ空でないようにとり、 $\delta^{-1}(\varepsilon)$  内の点  $z$  で

$$\varphi(z) = \max\{\varphi(x); x \in \delta^{-1}(\varepsilon)\}$$

を満たすものをとる。すると  $\delta$  の作り方から  $F_\alpha^{-1}(F_\alpha(z)) \subset \delta^{-1}(\varepsilon)$  であり、したがって多重劣調和関数の最大値の原理から  $\varphi|_{F_\alpha^{-1}(F_\alpha(z))}$  は  $z$  の近傍で定数になる。 $\varepsilon$  はいくらでも小さく選べるから、これは  $\partial\bar{\partial}\varphi$  の階数が  $X$  の近くで3以上であったことに反する。  
Q.E.D.

多少立ち入った層係数コホモロジー論を法として、同様の議論により次が得られる。

定理7 (cf.[O-4]) コンパクトなケーラー多様体  $M$  内の有効因子(effective divisor)  $B$  とその台  $A$  に対し、直線束  $[B]|_A$  が位相的に自明なら、 $M - A$  上には、あるコンパクト集合の外でLevi形式の階数が3以上になる  $C^\infty$  級の多重劣調和関数は存在しない。

これらの結果をふまえて、複素トーラス内の複素葉層とLevi平坦面について「簡約化定理」が得られる。それを[O-5]に沿って多少一般化された形で述べよう。最初に断ったように、簡単のため葉層は非特異として述べる。

まず、定理7の証明に使った議論をコピーして次の命題が得られる。

定理8 (cf.[O-5, Theorem 1.1])  $M$  はコンパクトなケーラー多様体、 $A$  は  $M$  の空でない真部分閉集合とし、 $A$  の近傍  $U$  と  $U$  上の余次元が1の複素葉層  $F$  が存在して、 $A$  は  $F$  の安定集合であり、 $F$  の法ベクトル束は位相的に自明であるとする。このとき  $M - A$  上には、あるコンパクト集合の外でLevi形式の階数が3以上になるような  $C^\infty$  級の多重劣調和関数は存在しない。

実解析的なLevi平坦面がその近傍上のある複素葉層の安定集合になることは、Levi平坦性の上記の特徴付け(特に4)から明らかであろう。

特に  $M$  が  $n$  次元の複素トーラスの場合、 $M - A$  上には「 $M$  上の平坦なエルミート計量  $\Sigma$  に関する  $A$  までの距離」( $\delta_A$  とおく)という解析しやすい関数があり、 $M - A$  の局所擬凸性から  $\varphi = \log(1/\delta_A)$  の多重劣調和性が従うことが、かなり以前から知られている(岡潔, 1942)。定理8はこの  $\varphi$  のLevi形式の、 $A$  の安定性に由来する制約を記述するものである。これを用いることにより、 $A$  に含まれる  $F$  の葉は、単に複素部分多様体であるだけではなく、「ほとんど線形」、つまり少なくとも  $n - 2$  次元の一定の方向に全測地的であることがわかる。(この部分の議論は松本和子氏の仕事[M]に基礎づけられている。)したがって  $A$  は互いに共通部分を持たない連結な  $n - 2$  次元全測地的複素部分多様

体の族  $\{L_\alpha\}$  で埋め尽くされることになる。 $L_\alpha$  が  $M$  内で閉かそうでないかによって場合分けし、その結果を整理して次が得られる。

定理 9 (簡約化定理、cf.[O-5, Theorem 0.1]) 定理 8 において  $M$  が複素トーラスであるとする。このとき  $A$  は  $(\Sigma$  に関して) 全測地的であるか、または 2 次元の複素トーラス  $T$ 、正則写像  $\pi : M \longrightarrow T$  および  $T$  の閉集合  $A'$  が存在して  $A = \pi^{-1}(A')$  となる。後の場合、 $A$  が複素部分多様体でなければ、葉層  $F$  自体も、 $A'$  の近傍上のある葉層の  $\pi$  による引き戻しに等しい。

系 複素トーラス内の実解析的な Levi 平坦面は、平坦であるか、または 2 次元または 1 次元の複素トーラス内の Levi 平坦面の正則写像による引き戻しである。

従って、複素トーラス内の実解析的かつ非平坦な Levi 平坦面の分類は、2 次元の場合に帰着する。(もちろん 1 次元の場合は trivial である。)

§ 4. 等質空間上の複素葉層 この節では、コンパクトな複素等質空間 (すなわち双正則自己同型群が推移的に作用するコンパクト複素多様体) 上で、余次元が 1 の複素葉層の分類を行なった E. Ghys の結果 [Gh] を紹介する。

まず複素トーラス  $T = \mathbb{C}^n / \Gamma$  の場合 (この場合が本質的) について述べよう。

$\mathbb{C}^n$  の平行移動は複素アファイン部分空間を複素アファイン部分空間に移すので、互いに平行な複素アファイン部分空間からなる  $\mathbb{C}^n$  の葉層から、射影によって  $T$  上の葉層が定まる。この葉層を、 $T$  上の線形葉層という。

次に、 $\Gamma$  を  $\mathbb{C}$  内の格子群  $\Gamma'$  上に写像する複素線形写像  $\xi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$  があるとき、 $T$  は線形葉層以外の葉層を持つことを見よう。簡単のため、 $\xi$  によって導かれるトーラス間の写像を同じ記号で表す。 $u$  を楕円曲線  $C = \mathbb{C} / \Gamma'$  上の非定数有理型関数とし、 $\omega$  を  $T$  上の正則 1 形式とする。 $\mathbb{C}^n$  の座標  $(z_1, \dots, z_n)$  を、 $\xi$  が  $z_1$  成分への射影と一致するように選ぶ。このとき  $dz_1$  は  $\mathbb{C}$  上の、0 ではない 1 形式であり、 $\xi^*(udz_1)$  は  $T$  上の有理型 1 形式となる。 $u$  の極の  $\xi$  による逆像を除いた領域  $\Omega$  上に、 $\omega + \xi^*(udz_1)$  の核を接束とする複素葉層  $F^0$  が定まる。 $\omega + \xi^*(udz_1)$  が  $\Omega$  で 0 点を持たない閉形式だからである。

$T - \Omega$  の点  $p$  の近傍では

$$u(z_1) = (z_1 - \alpha)^k v(z_1) \quad (k \geq 1 \text{ かつ } v \text{ は正則で } v(\alpha) \neq 0)$$

と書け、従って  $F^0$  は  $p$  の近傍上に、接束  $\text{Ker}(v(z_1)dz_1 + (z_1 - \alpha)^k \omega)$  を持つ葉層として拡張できる。よって  $F^0$  の拡張として  $T$  上の複素葉層  $F$  が定まる。 $\omega$  と  $\xi^* dz_1$  が  $\mathbb{C}$  上線形独立であれば、 $F$  は明らかに線形ではない。この  $F$  を擾乱型葉層と呼ぶ (Ghys によれば、これは "tourbillonnement de Reeb" の複素版である)。

容易に観察できるように、 $F$  は有限個のコンパクト葉を含み、 $F$  の任意の非コンパクト葉は  $T$  内ですべてのコンパクト葉に集積する。

**定理 10** (cf.[Gh,Théorème 1.1]) 複素トーラス  $T$  上の余次元が 1 の複素葉層は、線形か、または擾乱型である。

これを Titsらの仕事(たとえば[H]を参照)をふまえて一般化したものは次の通り。

**定理 11** (cf. [Gh,Théorème 1.4]) コンパクトな複素等質空間  $M$  上の、余次元が 1 の複素葉層  $F$  について、以下が成立する。

- 1)  $F$  の葉はすべてコンパクトであるか、または  $F$  の葉は有限個を除いて非コンパクトである。
- 2)  $F$  の非コンパクト葉すべての和集合  $U$  は、 $M$  の開集合として、 $F$  に対する横断射影構造をもつ (すなわち  $U$  の各点の近傍上に  $F$  の葉を定値集合とする関数を与えて、それらが互いにメビウス変換で移り合うようにできる)。
- 3)  $F$  の非コンパクト葉の  $U$  における閉包は、実余次元が 0、1 または 2 の部分多様体である。
- 4)  $F$  の任意のコンパクト葉は、 $F$  の任意の非コンパクト葉の  $M$  における閉包に含まれる。

**§5. 特異葉層について** 複素多様体上の特異葉層 (または特異点つきの複素葉層) とは、一口に言えば、特異点のまわりで接続性をもつ葉層をいう。詳しくは次の通り。 $M$  を複素多様体とし、 $\mathcal{O}_M$  をその構造層とすると、 $M$  上の特異葉層とは、 $M$  のある稠密な開集合  $D$  上の複素葉層  $(F, \iota)$  で、 $\iota^* \omega = 0$  をみたす  $M$  上の正則 1 形式の芽  $\omega$  を集めてできる  $\mathcal{O}_M$  加群の層  $\mathcal{F}$  が接続であるものをいう。この層  $\mathcal{F}$  のことも  $M$  上の特異葉層と呼び、 $F$  と適宜同一視する。 $\mathcal{F}$  の零化ベクトルの集合を  $\text{Ann } \mathcal{F} (\subset TM)$  としたとき、 $\text{Ann } \mathcal{F} \cap T_x M$  が  $F$  の次元に一致しない点  $x$  全体の集合を  $\mathcal{F}$  の特異点集合といい、 $\text{Sing } \mathcal{F}$  で表す。 $\text{Sing } \mathcal{F}$  の外で、 $\mathcal{F}$  は通常の複素葉層 (の余法束の正則断面の芽の層) である。その葉を  $\mathcal{F}$  の葉という。 $F$  の余次元が 1 のとき、接続性の定義から容易にわかるように、 $\mathcal{F}$  は可逆層である。これを特異葉層  $\mathcal{F}$  の余法束といい、その双対束を  $N_{\mathcal{F}}$  で表す。 $N_{\mathcal{F}}$  を  $\mathcal{F}$  の法束という。

最近、複素トーラス上の特異葉層に関して、Brunella氏により定理 10 の一般化にあたる結果が得られた。

**定義 (擾乱型葉層の一般化)** 複素トーラス  $T$  上の余次元が 1 の特異葉層  $\mathcal{F}$  が擾乱型であるとは、複素トーラス  $T'$  と全射正則写像  $\pi: T \longrightarrow T'$ 、 $T$  上の正則 1 形式  $\omega$  で

$\text{Ker } d\pi \subset \text{Ker } \omega$  をみたすもの、および  $T'$  上の非正則かつ閉な有理型 1 形式  $\eta$  が存在して、 $\eta$  の極の逆像の外では  $\mathcal{F}$  が局所的に  $\omega + \pi^*\eta$  で生成されることをいう。

定理12 (cf. [B-2, Theorem 1.1]) 複素トーラス  $T$  上の余次元が 1 の特異葉層  $\mathcal{F}$  は以下のように分類される。

- 1)  $\mathcal{F}$  は (非特異であり) 線形である。
- 2)  $\mathcal{F}$  は擾乱型である。
- 3) 複素トーラス  $T'$  と全射正則写像  $\pi: T \longrightarrow T'$ 、および  $T'$  上の余次元が 1 の特異葉層  $\mathcal{F}'$  が存在して、 $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{F}'$  であり、かつ法束  $N_{\mathcal{F}'} \longrightarrow T'$  は正 (= 豊富) となる。

この最後の場合について、より詳しくは次の通り。

定理13 (cf. [B-2, Theorem 1.2])  $T$  は 3 次元以上の複素トーラス、 $\mathcal{F}$  は  $T$  上の余次元が 1 の特異葉層で、その法束は正とする。このとき  $\mathcal{F}$  の任意の葉の  $T$  における閉包は  $\text{Sing } \mathcal{F}$  と交わる。

これは  $\mathbb{CP}^n$  上の特異葉層について Lins Neto [LN] が得た結果の類似であるが、より一般的な予想 (cf. [B-1]) の特別な場合でもある。

## 引用文献

- [Ba] Barrett, D., Biholomorphic domains with inequivalent boundaries, Invent. Math. 85 (1986), 373-377.
- [B-1] Brunella, M., On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle, to appear in Indiana Univ. math. J. 57 (2008)
- [B-2] ———, Codimension one foliations on complex tori, preprint.
- [Dm] Demailly, J.-P., Cohomology of  $q$ -convex spaces in top degree, Math. Z. 204 (1990), 283-295.
- [D-F] Diederich, K. and Fornaess, J.E., A smooth pseudoconvex domain without pseudoconvex exhaustion, manuscripta Math. 39 (1982), 119-123.
- [D-O] Diederich, K. and Ohsawa, T., Harmonic maps and disc bundles over compact Kähler manifolds, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 819-833.
- [F] Fujita, R., Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, J. Math. Soc. Japan 15 (1963), 443-473.
- [Gh] Ghys, É., Feuilletages holomorphes de codimension un sur les espaces homogènes complexes, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 5 (1996), 493-519.
- [Gr] Grauert, H., Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten,

- Math.Z. 81 (1963), 377-391.
- [Hö] Hörmander, L.,  $L^2$  estimates and the existence theorems for the  $\bar{\partial}$  operator, *Acta Math.* 113 (1965), 89-152.
- [H] Huckleberry, A., Actions of groups of holomorphic transformations, in *Encyclopedia of Mathematical Sciences, Several Complex Variables VI*, edited by W. Barth and R. Narasimhan, Springer-Verlag (1990).
- [J-Y] Jost, J. and Yau, S.-T., Harmonic mappings and Kähler manifolds, *Math. Ann.* 262 (1983), 145-166.
- [K] Kiselman, C.O., A study of the Bergman projection in certain Hartogs domains, *Several Complex Variables and Complex Geometry, Proc. Symp. Pure Math.* 52, Part 3, AMS Providence, RI, 1991, pp. 219-231.
- [LN] Lins Neto, A., A note on projective Levi-flats and minimal sets of algebraic foliations, *Ann. Inst. Fourier* 49 (1999), 1369-1385.
- [M] Matsumoto, K., Levi form of logarithmic distance to complex submanifolds and its application to developability, *Adv. Stud. in Pure Math.* 42, 2004, pp. 203-207.
- [N] Nemirovski, S., Stein domains with Levi-flat boundaries in compact complex surfaces, *Math. Notes*, 66 (1999), 522-525.
- [O-1] Ohsawa, T., A reduction theorem for cohomology groups of very strongly  $q$ -convex Kähler manifolds, *Invent. math.* 63 (1981), 335-354, Addendum: *Invent. math.* 66 (1982), 391-393.
- [O-2] ———, A Stein domain with smooth boundary which has a product structure, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 18 (1982), 1185-1186.
- [O-3] ———, On the complement of Levi-flats in Kähler manifolds of dimension  $\geq 3$ , *Nagoya Math. J.* 185 (2007), 161-169.
- [O-4] ———, A remark on pseudoconvex domains with analytic complements in compact Kähler manifolds, *J. Math. Kyoto Univ.* 47 (2007), 115-119.
- [O-5] ———, A reduction theorem for stable sets of holomorphic foliations on complex tori, to appear in *Nagoya Math. J.*
- [Si] Siu, Y.-T., The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, *Ann. Math.* 112 (1980), 73-111.
- [Sw] Suwa, T., Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations, *Actualités Mathématiques*, Hermann (1998).
- [T] Takeuchi, A., Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif, *J. Math. Soc. Japan* 16 (1964), 159-181.
- [U] Ueda, T., On the neighbourhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, *J. Math. Kyoto Univ.* 22 (1983), 583-607.